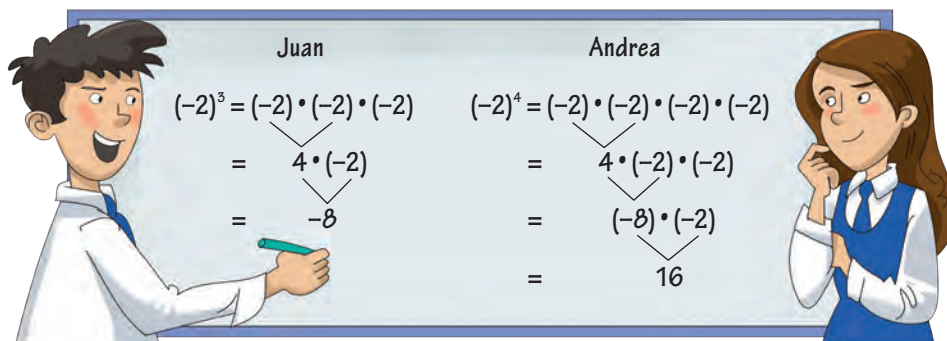


Potencias de base y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base y exponente son números enteros.
- Comprender el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

Juan y Andrea resuelven ejercicios de potencias.



Su profesor lo revisa y les dice que ambos cálculos están correctos:

- Comprueba los cálculos usando la **calculadora**.
- ¿Qué relación observas entre cada potencia y su resultado? Explica.

Completa la siguiente tabla y luego responde.

Actitud

Cuando trabajes en equipo, recuerda respetar y valorar las opiniones de los demás.

Potencia	Multiplicación iterada	Resultado	¿Exponente par o impar?	Signo del resultado
$(-2)^5$				
$(-2)^6$				
$(-3)^4$				
$(-3)^5$				
$(-1)^7$				
$(-1)^8$				



- ¿Qué signo tiene el resultado de una potencia cuya base es un número negativo? ¿Depende del exponente? Comenta con un compañero o una compañera.

Habilidad

Cuando elaboras esquemas o tablas para dar respuesta a distintas situaciones estás desarrollando la habilidad de **representar**.

Al igual que las potencias que tienen como base un número natural, las potencias que tienen como base un número entero negativo y exponente natural se pueden considerar como una multiplicación iterada.

Conceptos

- ▶ Una **potencia** cuya base es un **número entero negativo** dará como resultado un número positivo si el exponente es par, y dará como resultado un número negativo si el exponente es impar.
- ▶ Al representar simbólicamente esta relación, se tiene que: Si $a \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:
 - Si n es par, entonces $a^n > 0$.
 - Si n es impar, entonces $a^n < 0$.

Ejemplo 1

¿El resultado de -5^4 es igual que el de $(-5)^4$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

1 Calculas por separado ambas potencias.

$$\begin{aligned}
 -5^4 &= -(5^4) = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \\
 &= -(25 \cdot 5 \cdot 5) \\
 &= -(125 \cdot 5) \\
 &= -625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-5)^4 &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \\
 &= 25 \cdot (-5) \cdot (-5) \\
 &= -125 \cdot (-5) \\
 &= 625
 \end{aligned}$$

PASO A PASO

2 En el desarrollo de la potencia del lado izquierdo se observa que el signo de la potencia en todo el desarrollo es negativo.

3 En el lado derecho se observa que el signo de la potencia influye en cada una de las multiplicaciones.

Respuesta: El resultado de -5^4 es distinto al de $(-5)^4$.

Atención

Recuerda la **regla de los signos para la multiplicación** de números enteros.

$$\begin{array}{ll}
 + \cdot + = + & + \cdot - = - \\
 - \cdot - = + & - \cdot + = -
 \end{array}$$

Conceptos

Cuando el **exponente de una potencia es 0**, su resultado es 1 siempre que la base de la potencia no sea 0.

Simbólicamente: Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.

Atención

$\mathbb{Z} - \{0\}$ significa que se considera el conjunto de los números enteros pero menos el cero.

Ejemplo 2

Verifica con un ejemplo que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

Se utilizará $a = 3$, entonces se tiene que la división $3 : 3 = 1$, que se escribe como $3^1 : 3^1$ usando potencias.

Luego al aplicar la regla de la división de potencias de igual base se tiene:

$$1 = 3^1 : 3^1 = 3^{1-1} = 3^0$$

Por lo tanto $3^0 = 1$, es decir, se verifica la propiedad.

- ⦿ En vez de usar la base 3 si se utiliza una base negativa o cualquier otra base distinta de cero, ¿cómo desarrollarías el ejemplo? Comenta con un compañero o una compañera.

Hasta ahora has calculado potencias con exponente positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es un número negativo? Por ejemplo, calculemos el valor de 2^{-3} .

Observa lo siguiente:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Entonces, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- ¿Se utilizó alguna propiedad de potencia? Explica.

Conceptos

Si el **exponente de una potencia de base natural** es un número entero negativo, su valor será igual al del inverso multiplicativo de la potencia cuyo exponente es positivo.

Simbólicamente: Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Esta propiedad también se cumple si la base de la potencia es un número entero distinto de cero.

Ejemplo 3

Calcula el cociente entre 3^7 y 3^9 y escríbelo como potencia.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

- 1 Escribe el valor de cada potencia.

Valor de 3^7 .

$$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2\,187$$

Valor de 3^9 .

$$3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 19\,683.$$

PASO A PASO

- 2 Calcula el cociente empleando la regla de la división de potencias de igual base y usando sus valores.

Usando potencias

$$2\,187 : 19\,683 = 3^7 : 3^9 \\ = 3^{7-9} = 3^{-2}$$

Usando valores

$$2\,187 : 19\,683 = \frac{2\,187}{19\,683} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

- 3 Igualas los dos resultados y obtienes que $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Por lo tanto, $3^7 : 3^9 = 2\,187 : 19\,683 = 3^{-2}$.

⊕ ¿Es correcto afirmar que siempre se cumple que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$? ¿Por qué?

⊕ ¿Cuál es la importancia del conjunto numérico al que pertenecen a y n ?

Ejemplo 4

Calcula el valor de $(-2)^{-4}$ y de $(-3)^{-3}$.

- $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$ > Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.
 $= \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}$ > Desarrollas la potencia.
 $= \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$ > Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.
 $= \frac{1}{2^4}$ > Escribes el denominador como potencia.
- $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$ > Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.
 $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}$ > Desarrollas la potencia.
 $= \frac{1}{9 \cdot (-3)} = \frac{1}{-27}$ > Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.
 $= -\frac{1}{27}$
 $= -\frac{1}{3^3}$ > Escribes el denominador como una potencia.

Por lo tanto, $(-2)^{-4} = \frac{1}{2^4}$ y $(-3)^{-3} = -\frac{1}{3^3}$.

¿Cómo se puede expresar una fracción cuyo denominador es una potencia de exponente negativo? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejemplo 5

Usa las propiedades de las potencias de base entera para simplificar la expresión algebraica y escribirla como potencia. Considera que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{c \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot c^3}$$

Para simplificar la expresión, puedes seguir estos pasos:

- $\frac{a^2 \cdot b^{2+3} \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^{1+3}} = \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}$ > Aplicas la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.
 $= \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^5}{b^5} \cdot \frac{c^4}{c^4}$ > Escribes como producto de fracciones.
 $= a^{2-2} \cdot b^{5-5} \cdot c^{4-4}$ > Aplicas la propiedad de la división de potencias.
 $= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0$ > Aplicas la propiedad de las potencias con exponente cero.
 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Atención

Cuando el exponente de una potencia no se anota, se asume que es 1, es decir, $a = a^1$.

¿Cómo explicarías usando argumentos matemáticos que el valor de una potencia de exponente 0 es 1? Explica con tus palabras.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe positivo o negativo, dependiendo del valor de cada potencia.

a. $(-6)^7$

c. $(-5)^4$

e. 18^5

b. 8^3

d. -6^7

f. 2^3

2. Representa los siguientes productos como potencias.

a. $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

d. $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

b. $-(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$

e. $-(8 \cdot 8 \cdot 8)$

c. $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

f. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

3. Escribe cada potencia como un producto de factores iguales.

a. -3^6

c. 8^4

e. -7^3

b. $(-11)^2$

d. 2^3

f. $-(15)^2$

4. Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias.

a. $\frac{(-3)^3 \cdot (-5)^2}{225}$

b. $\frac{(-5^{-2}) \cdot (5^4) \cdot (125)^{-1}}{25 \cdot 5^{-2}}$

c. $\frac{(3^2) \cdot (3^4) \cdot (-27)^{-1}}{81 \cdot 243^{-1}}$

5. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a. 5^4

c. 1^{12}

e. $(-3)^5$

b. -4^4

d. 10^4

f. -12^2

6. Explica si cada igualdad es correcta o no. Corrige las incorrectas.

a. $-7^5 = 16807$

c. $8^4 = \frac{1}{8^{-4}}$

e. $-7^2 + (-2)^3 = -57$

b. $-5^{-4} = -\frac{1}{5^4}$

d. $2^{-3} = \frac{1}{9}$

f. $\frac{1}{2^{-3}} = 6$

7. Lee y responde.

La profesora de Matemática pidió a sus estudiantes, como tarea, que anotaran en un cartel 6 potencias con exponente 0 y sus respectivos resultados. Andrés elaboró el cartel que se muestra. ¿Cuáles de las igualdades son incorrectas? Explica.

POTENCIAS CON EXPONENTE 0

$2^0 = 1$	$-2^0 = 1$
$1^0 = 1$	$(-2)^0 = 1$
$-(-3)^0 = 1$	$(-3)^0 = -1$

8. Resuelve los siguientes problemas.

- a. Don Pedro instaló un tanque cúbico en su casa para almacenar agua. Si la arista del tanque es de 8 dm, ¿qué potencia representa al volumen de ese tanque?
- b. Carlos y David jugaron 5 partidas de ajedrez, de las que David ganó 3. Carlos le preguntó a su amigo qué quería como premio. David, que es aficionado a la Matemática y le gustan mucho las frutas, le pidió que le llevara naranjas:
 - Sí, está bien. ¿Cuántas quieres? —preguntó Carlos.
 - Quiero que me traigas 1 por la primera casilla del tablero de ajedrez, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente; es decir, en cada casilla el doble de la anterior, hasta la casilla 32.
 - Está bien, mañana las traigo —dijo Carlos sin imaginarse lo que le habían pedido.
 - Escribe como potencia la cantidad de naranjas que debería llevar Carlos.
 - Usa una calculadora científica para determinar esa cantidad de naranjas.



- c. Observa la siguiente situación.



- Para colaborar con su amigo y su amiga, Gloria debe decir quién tiene la razón. ¿A quién debe escoger? ¿Qué explicación les podría dar? Comenta con un compañero o una compañera.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué significan el exponente 0 y los exponentes enteros negativos en una potencia?

- Cuando trabajaste con tus compañeros, ¿respetaste y valoraste sus opiniones? ¿Qué actitud mostraste?
