Lección 7 El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Conjunto de los números complejos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones. Luego, indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenezcan sus soluciones.

a. $2x = 5x - (x + 10)$

d. $3x^2 + 75 = 0$

b. $10x - \frac{15 + x}{2} = 11x$

e. $x^2 - 64 = 0$

c. $3 + (x + 2)(x + 1) = x(x - 1)$

f. $x^2 - 3x + 3 = 0$

2. Calcula las siguientes potencias.

a. $(5i^3)^5 + (i^2)^3 =$ __________

c. $-5(i^5)^3 - (2i^5)^2 =$ __________

b. $12(i^4)^4 - (2i^3)^2 =$ __________

d. $\frac{i^{40}}{i^{12}} \cdot i^{175} =$ __________

3. Completa la tabla con la parte real e imaginaria de cada número complejo.

z	$3 + 8i$	$-4 - 7i$	$12{,}2 - 0{,}78i$	$-5 + \frac{3}{8}i$	$\sqrt{7} - \frac{4}{9}i$	$2\sqrt{7} - 3\frac{\sqrt{5}}{2}i$
Re(z)						
Im(z)						

4. Calcula para qué valores reales $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ los números complejos $\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{w}$ son iguales.

a. $z = (3 - 4m) + ni$

$w = 1 + 2i$

$m =$ _______

$n =$ _______

b. $z = 5(1 - n) + 10i$

$w = 1 - 6mi$

$m =$ _______

$n =$ _______

c. $z = 18ni$

$w = 6m + (1 + n)\mathrm{i}$

$m =$ _______

$n =$ _______

d. $z = 14\mathrm{i}$

$w = 8m + (n^2 + 1)i$

$m =$ _______

$n =$ _______

5. Resuelve los problemas. Considera que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}i$

Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + 3$ y $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = 6$, ¿cuál es el número $\boldsymbol{z}$?

Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} - 3$ y $\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q} = 9$, ¿cuál es el número $\boldsymbol{z}$?

Lección 7

Representación de números complejos

1. Representa en el plano de Argand los vectores asociados a cada número complejos.

$z_1 = (7, 6)$

$z_2 = (-5, -1)$

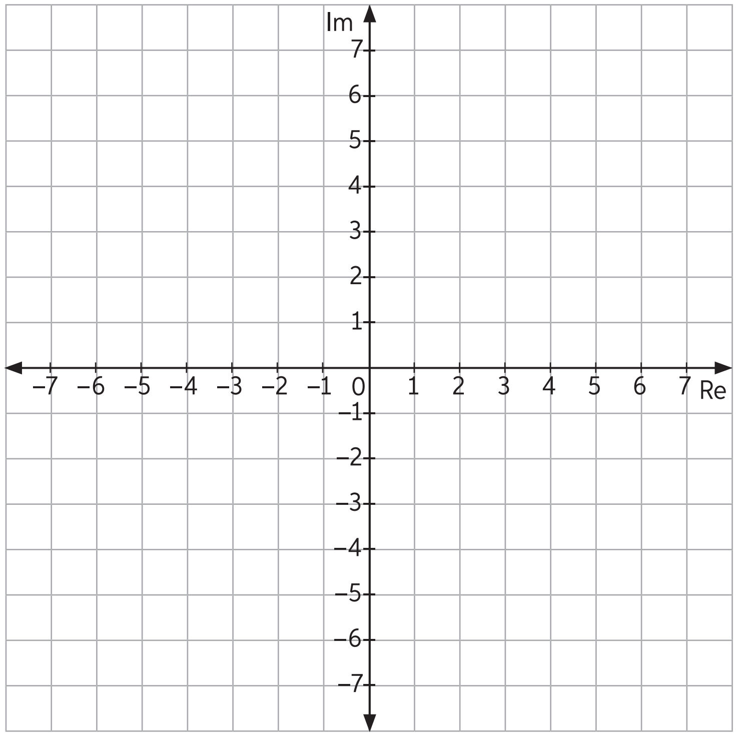
$z_3 = -2i$

$z_4 = 3{,}5 - 1{,}5i$

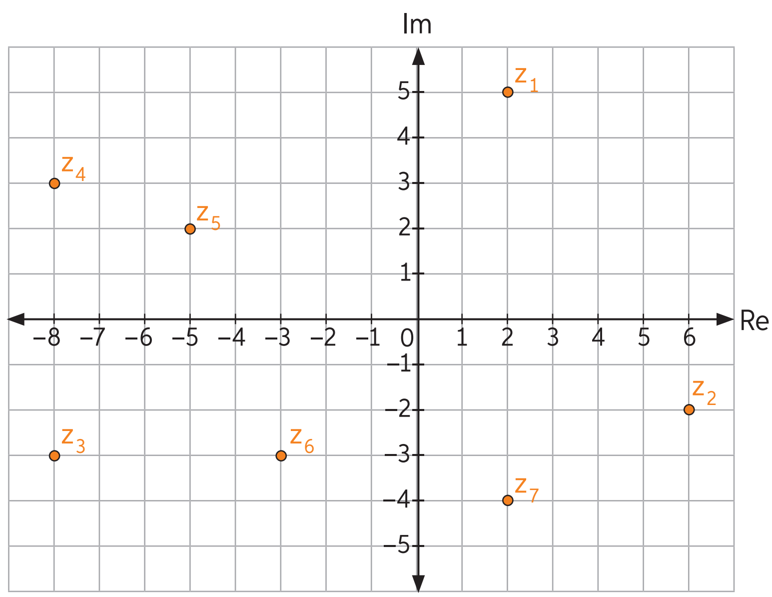
$z_5 = \left(7, -\frac{7}{2}\right)$

$z_6 = -7i + 4$

$z_7 = \left(-\frac{5}{2}, -6\right)$



2. Analiza el siguiente plano de Argand. Luego, Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Compara tus respuestas con un compañero.



a. ________ La parte real de z_1 es 5.

b. ________ La parte imaginaria de z_2 es -2.

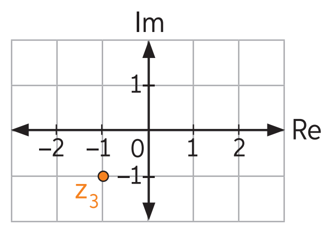
c. ________ La forma binomial de z_3 es $8 - 3i$.

d. ________ z_7 escrito como par ordenado es $(-2, -4)$.

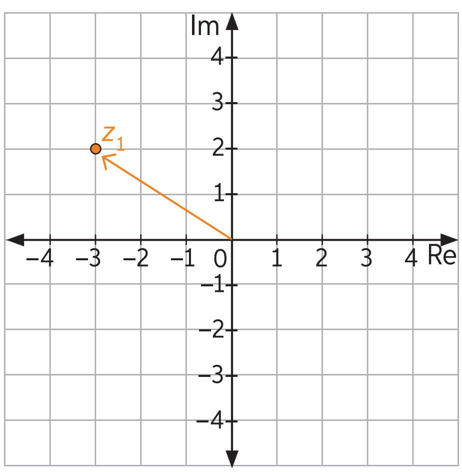
e. ________ Los números complejos z_3 y z_4 están en el mismo cuadrante.

f. ________ La parte real de z_5 es mayor que la parte real de z_6.

3. Completa la siguiente tabla según la representación de número complejo pedida.

Forma binomial	Par ordenado	Representación gráfica
$z_1 = \frac{1}{2} - 2i$		
	$z_2 = (3, 5)$	
		
$z_4 = 3 - i$		

4. Resuelve el problema.
Joaquín debe descubrir los números complejos z_2 y z_3. Para esto, cuenta con la siguiente información.



- La representación de z_2 equivale a realizar una reflexión de z_1 con respecto al eje imaginario.
- La representación de z_3 equivale a realizar una reflexión de z_2 con respecto al eje real.

a. Representa z_2 y z_3 en el plano anterior.

b. ¿Cuál es la forma binomial de z_2 y z_3? Escríbelas.

z_2 = ____________ z_3 = ____________

Módulo y conjugado de un número complejo

1. Calcula el módulo de los siguientes números complejos. Luego, ordena sus módulos de menor a mayor.

a. $z_1 = -3 + 4i$

b. $z_2 = (-3, 3)$

c. $z_3 = -1i$

d. $z_4 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}i$

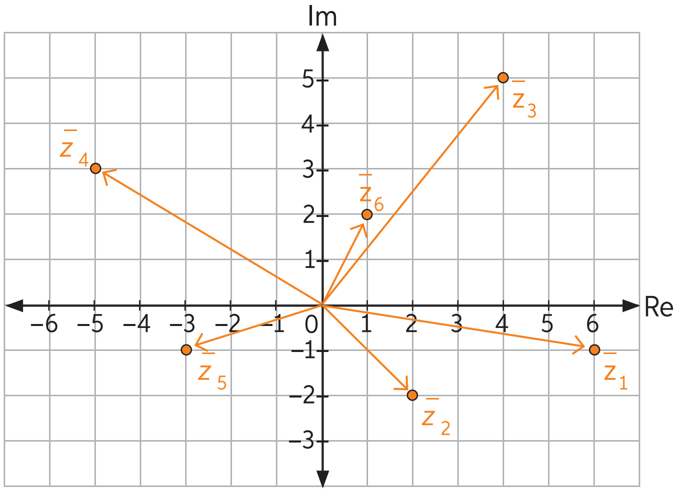
e. $z_5 = 4\sqrt{3} - 7\sqrt{5}\,i$

f. $z_6 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\,i - 7\sqrt{5}\,i$

g. $z_7 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + i$

h. $z_8 = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$

2. En el plano de Argand se muestran los conjugados de 6 números complejos.



Escribe cada número complejo de forma binomial.

a. $z_1 =$ ____________

b. $z_2 =$ ____________

c. $z_3 =$ ____________

d. $z_4 =$ ____________

e. $z_5 =$ ____________

f. $z_6 =$ ____________

Actividad de aplicación Juego de tablero con números complejos

¿Qué haremos? Confeccionar un juego que simule el plano de Argand.

Planifiquemos

En parejas, deben construir lo siguiente:

- 1 tablero cuadrado cuadriculado que represente el plano de Argand.
- 2 dados de 6 caras: una para el eje real y otro para el eje imaginario.
- 1 ficha que contenga signo “+” en una cara y signo “–” en la otra.

Paso 1: Conversen acerca de cómo construirán el tablero. Para esto, anoten los siguientes aspectos:

- Materiales que necesitan para la construcción.

___

___

___

- Tiempo destinado a la confección del tablero.

___

- Objetos que simularán su ficha (ejemplo: moneda).

___

- Instrumento para medir el tiempo durante el juego (ejemplo: cronómetro).

___

Paso 2: Detallen en una hoja el procedimiento que utilizarán en la confección del juego.

Juguemos

Paso 3: Establezcan, al reverso de su hoja, las reglas del juego en las que se utilice el cálculo del módulo de un número complejo y/o el conjugado de manera tal que siempre haya un ganador. Luego, comiencen a jugar. Un ejemplo de regla es el siguiente:

“Cada jugador debe lanzar el dado del eje real y la ficha para determinar el valor y el signo del número de la parte real del número complejo. Lo mismo debe realizar para formar la parte imaginaria. Luego, debe marcar el número complejo en el plano Argand, mientras su rival intenta encontrar el módulo de dicho número complejo. Gana quien logre su objetivo en menos tiempo.”

Discutamos

Paso 4: Luego de jugar, discutan de acuerdo a las siguientes preguntas:

- ¿Dónde notaron mayor dificultad en el juego?, ¿por qué?
- ¿Qué estrategia usaron para desarrollar de manera más rápida los cálculos?
- Si tuvieran que agregar alguna regla para aumentar la dificultad, ¿cuál sería?

Antes de continuar

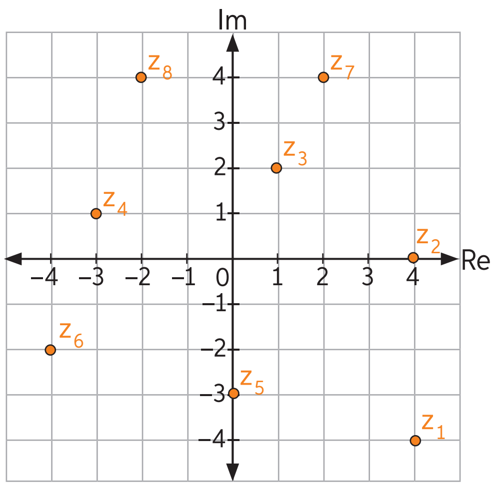
Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Resuelve las ecuaciones e indica a qué conjunto numérico pertenecen sus respectivas soluciones. En caso de que pertenezcan al conjunto de números complejos, indica su parte real e imaginaria.

a. $x^2 + 2 = 2x$

b. $2x^2 - x + 15 = 0$

2. Realiza las siguientes actividades utilizando la información del siguiente plano de Argand.



a. Representa en el plano anterior el vector de los conjugados de z_1, z_3 y z_4.

b. Escribe en forma binomial z_5, z_6, z_7 y z_8, y como par ordenado a z_1, z_2, z_3 y z_4.

$z_1 =$ ________ $z_3 =$ ________ $z_5 =$ ________ $z_7 =$ ________

$z_2 =$ ________ $z_4 =$ ________ $z_6 =$ ________ $z_8 =$ ________

c. ¿Cuál es el módulo de z_5, z_6, y z_7? Calcúlalos.

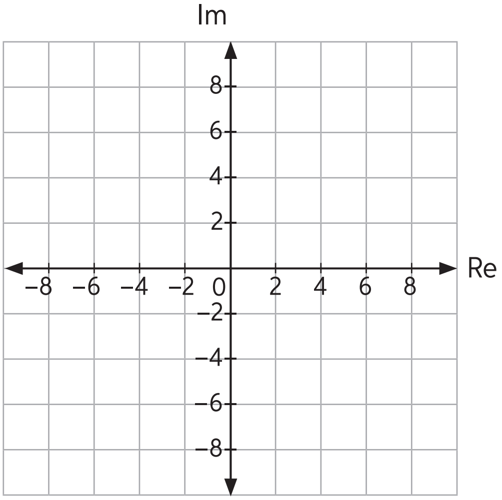
$z_5 =$ ___________ $z_6 =$ ___________ $z_7 =$ ___________

d. Analiza las siguientes afirmaciones. Luego, anota y justifica V o F en cada caso.

- ________ El módulo de z_5 es mayor que el módulo del conjugado de z_7
- ________ z_7 es igual al conjugado de z_8.
- ________ La parte imaginaria de z_6 es mayor que la parte imaginaria de z_4.

Adición y sustracción de números complejos

1. Representa en el plano de Argand el vector resultante de las siguientes operaciones combinadas:



a. $z = (3, 2) - (0, 4) - (5, 5) + (2, 0)$

b. $w = (3 + 4i) + (2 + 3i) - (i - 2)$

c. $u = (-2, 4) + (7, -4) + (-12, 7)$

d. $v = (8i + 3) + (-2 + 2i) - (3 + 4i)$

2. Calcula los valores de ***a*** y ***b*** para que se cumpla la igualdad.

a. $3a + 2 - 4bi - i = 5a - 2i + 5bi - 3$

b. $(2a + 7, 3b - 3) = (-3 - 2a, 7b)$

c. $4i - 5 + 3bi - a = 5ai - 5 + 9bi$

d. $(5b, 4 + 7a) = (2a - 2, -3)$

3. Expresa el resultado de cada operación en la forma de par ordenado y binomial.

a. $(18 + 4i) + (-11 + 23i)$

d. $(2{,}5;\ 9{,}3) - (5{,}6;\ -4{,}2) + (7{,}4;\ 3)$

b. $(2, 7) + (-13, 0)$

e. $(-22, 19) - (32, -16)$

c. $(3i - 4) - (18 + 5i)$

f. $-(3{,}9 + 2i) + (7{,}5 - 3{,}7i) - (2{,}6 + 4{,}087i)$

4. Resuelve los problemas.

a. Si $x = 4 - 2i$ e $y = -8 + 5i$, ¿cuál es el valor de $\overline{x} - \overline{y}$?

b. Si $z + \overline{z} = 10$, ¿qué valor podría tener z?

c. Si $z = \frac{2}{3} - \frac{4}{5}i$, ¿cuál es el valor de $|z - \overline{z}|$?

Multiplicación de números complejos

1. Realiza la ponderación de los siguientes números complejos. Escribe el resultado de forma par ordenado y binomial.

a. $(2,0) \cdot (3,6; 7,2)$

b. $3 \cdot (3,8 - 2,7i)$

c. $(-3, 0) \cdot (-5,2; 0) \cdot (2,7; -3,8)$

d. $4,2 \cdot (7,2 - 0i) \cdot (3,09 - 4,8i)$

2. Multiplica y simplifica los siguientes números complejos:

a. $(-4 + 4i) \cdot (3 + 2i)$

b. $(5 + 3i) \cdot (4,5 + 7,8i)$

c. $(3,4; -5,2) \cdot (-2,9; 6,8)$

d. $(5,3; 7,1) \cdot (-4,3; 2,8)$

3. Desarrolla las siguientes potencias y calcula el resultado final.

a. $(2 - 3i)^2 - (5 - 2i)^3$

b. $(-5 + 4i)^3 + (2,5 - 3i)^2$

c. $(-3 + 4i)^2 - (7 - 2i)^2$

d. $(6 + 14i)^4 + (7 - 12i)^2$

Lección 8

4. Encuentra el valor de k que pondera a cada número complejo.

a. $k(2, 3) = (10, 15)$

d. $k(-5, -4) = (15, 12)$

b. $k(7, 8) = (-14, -16)$

e. $k(7, 2) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$

c. $k(-2, 1) = (-12, 6)$

f. $k(-1, -7) = \left(\frac{3}{4}, \frac{21}{4}\right)$

5. Si $\boldsymbol{z}$ corresponde al resultado de la operación $(3 - i)\,(4 + 7i)\,(-8 + 2i)$, ¿cuál es el valor del inverso aditivo de $\boldsymbol{z}$?

División de números complejos

1. Calcula. Luego, escribe el resultado de forma binomial.

a. $\dfrac{3 - 3i}{5 + i}$

b. $\dfrac{2 + 5i}{6 - 6i}$

c. $\dfrac{2{,}5 + 0{,}9i}{3{,}6 - 5{,}6i}$

d. $\dfrac{-3{,}7 - 5{,}9i}{4{,}2 + 7{,}4i}$

e. $\dfrac{(3,\ 8)}{(-3,\ -7)}$

f. $\dfrac{(12,\ -7)}{(5,\ -6)}$

g. $\dfrac{(4{,}6;\ 2{,}6)}{(2{,}9;\ -4)}$

h. $\dfrac{(9{,}2;\ -3{,}6)}{(7{,}2;\ -0{,}4)}$

Lección 8

2. Calcula el inverso multiplicativo de los siguientes números complejos.

a. $7 + 3i$

c. $14 - 1{,}1i$

b. $6 - 2i$

d. $0{,}1 - 10i$

3. Analiza la situación. Luego, responde.

Marcelo anotó el desarrollo de $(5 + 7i) : (3 - 4i)$ en su cuaderno. Sin embargo, su profesora notó que era incorrecto:

$$\frac{(5+7i)(3-4i)}{\left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^2} = \frac{15-20i+21i-28i^2}{(\sqrt{9+16})^2}$$

$$= \frac{15+i-28\cdot -1}{25} = \frac{15+28+i}{25}$$

$$= \frac{42}{25}+\frac{1}{25}i$$

a. ¿Cuál fue el error de Marcelo? Descríbelo.

b. Corrige el desarrollo y calcula el resultado de la operación.

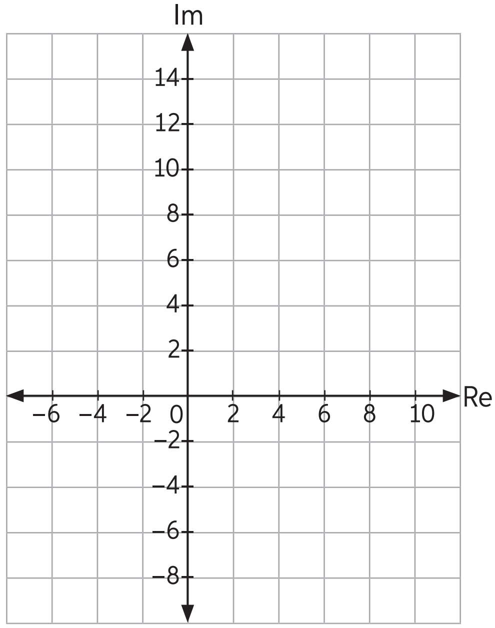
Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Dado el número complejo $z_1 = 2 + 4i$, calcula y representa los siguientes números complejos:

a. $z_2 = 3z_1$

b. $z_3 = -z_1 + \frac{1}{2}z_1$



2. Calcula el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cada número complejo. Completa la tabla.

z	$-z$	z^{-1}
(0, −3)		
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$		

3. Observa la situación.

Matilde y José discuten sobre una propiedad que cumple z, con $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

El módulo del inverso multiplicativo de z es igual al conjugado del inverso multiplicativo del módulo de z.

El módulo del inverso multiplicativo de z es igual al inverso multiplicativo del módulo de z.

Verifica lo que dice cada uno: ¿quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta con ejemplos.