Intervalos de números reales

Aprenderé a: representar conjuntos de números reales utilizando intervalos y realizar operaciones con intervalos.

Repaso

1. Menciona 10 números reales que se encuentren entre 1,2 y 1,4.
2. ¿Cuántos números reales hay entre dos números reales dados?

Si queremos determinar todos los números enteros que cumplen la condición $-3 \leqslant n < 5$, podemos escribir el conjunto correspondiente, esto es:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Ahora, ¿cómo podrías representar por extensión todos los números reales que cumplen la condición $-3 \leqslant x < 5$? Argumenta tu respuesta.

Seguramente te diste cuenta de que escribir por extensión todos los números reales tales que cumplan $-3 \leqslant x < 5$ sería imposible, porque hay infinitos números. Pero existe otra manera de representar este tipo de conjuntos: usando **intervalos de números reales**.

En este caso, el conjunto se representa $[-3, 5[$. Se dice que es **cerrado** en el -3, porque el conjunto incluye ese número, y **abierto** en el 5, porque no lo incluye.

Otra forma de representar este intervalo es gráficamente en la recta real, tal como se muestra en la figura de la derecha. Observa que en el valor -3 hay un círculo negro; esto es porque el intervalo incluye este valor. En el caso de que no lo incluya, como en el 5, se dibuja un círculo blanco.

Atención

La orientación de los corchetes nos indica si los extremos del intervalo forman parte del conjunto o no.

También se pueden utilizar paréntesis redondos para indicar cuando el número no pertenece al intervalo.

Por ejemplo:
Todos los números n que cumplen: $-1 < n \leqslant 10$ se representan como $]-1, 10]$ o bien $(-1, 10]$.

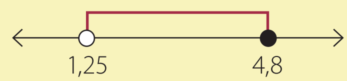
Todos los números n que cumplen: $5 < n$ se representan como $(5, +\infty[$ o bien $(5, +\infty)$.

Cuando los extremos de los intervalos son decimales, se puede usar punto y coma para distinguir la separación de ambos números de la coma decimal.

¿Cómo hacerlo?

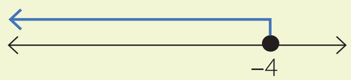
Representa como un intervalo el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1{,}25 < x \leqslant 4{,}8\}$.

Para expresar el conjunto anterior como intervalo escribimos los números correspondientes a los extremos del intervalo, separados por una coma (o punto y coma) y un espacio, y decidimos la orientación de los corchetes, según si el intervalo es abierto o cerrado, en cada caso. Luego, el intervalo es $]1{,}25; 4{,}8]$, y su representación gráfica es la que se muestra en la imagen de la derecha.



¿Cómo hacerlo?

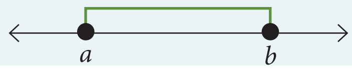
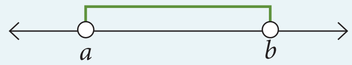
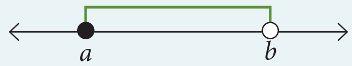
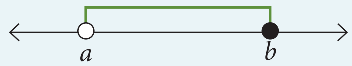
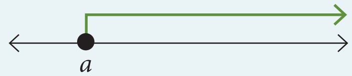
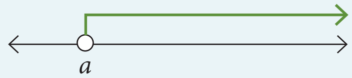
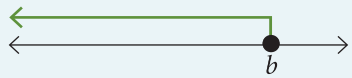
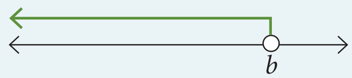
Respecto de la siguiente figura, ¿qué elementos están representados? Exprésalos como un conjunto, por comprensión, y utilizando notación de intervalos.



Para expresar la representación gráfica como conjunto, reconocemos los números que están identificados en la recta numérica. En este caso, corresponde a todos los números menores que -4. Luego, como conjunto se escribe $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant -4\}$. Como intervalo, se escribe $]-\infty, -4]$, cerrado en el -4, ya que lo incluye y abierto en el $-\infty$ ("menos infinito") porque $-\infty$ no es exactamente un número, sino que indica, en este caso que el intervalo no está limitado por algún número menor. Mientras que en el caso de $+\infty$ ("más infinito"), se refiere a que no existe un único número mayor que los demás.

Tomo nota

- El conjunto de números reales que se encuentran entre otros dos números dados se puede representar mediante intervalos, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Tipo de intervalo	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Abierto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Semiabierto	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
No acotados o infinitos	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
	$]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

Actividades

1. Encuentra tres números que pertenezcan a cada uno de los intervalos dados.

a. $]0, 1[$

b. $]\pi, 4]$

c. $]1{,}41, \sqrt{2}[$

d. $]0; 0{,}1[$

e. $]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$

f. $]-0{,}001; 0[$

2. Expresa como intervalo y representa gráficamente los siguientes conjuntos.

a. $\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{3} < x\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{5} < x \leqslant 1{,}33\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leqslant 0{,}5\}$

d. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant -3\}$

e. $\{x \in \mathbb{R} / -12 \leqslant x \leqslant 5{,}8\}$

f. $\left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{4}{5}\right\}$

3. Considera los siguientes números: $0, \pi, \sqrt{2}$ y $\frac{3}{4}$.

a. Encuentra un intervalo que contenga todos estos números.

b. Encuentra un intervalo que no contenga ninguno de ellos.

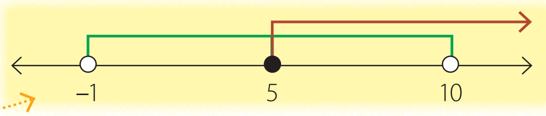
c. Para cada número, encuentra un intervalo cerrado que lo contenga y cuyos extremos sean números enteros consecutivos.

De la misma manera que pueden realizarse operaciones entre conjuntos, tales como su unión y su intersección, estas operaciones pueden extenderse a los intervalos, ya que, por definición, los intervalos son conjuntos de números reales.

En particular, nos concentraremos en la unión y la intersección de intervalos de números reales; por ejemplo, si tenemos los intervalos $A =]-1, 10[$ y $B = [5, +\infty[$ podemos determinar la unión $A \cup B$, considerando tanto los números que están entre –1 y 10, ambos no incluidos, como los que son mayores o iguales que 5.

Dada la representación gráfica de ambos conjuntos:

En muchos casos, una buena alternativa para resolver un problema es representar la situación con un dibujo.



En la figura anterior, representamos con color verde el conjunto A, y con rojo el conjunto B. Entonces, para determinar $A \cup B$ debemos incluir todos los valores de la recta que quedaron pintados, ya sea con verde por pertenecer a A, o con rojo por pertenecer a B. Finalmente podemos concluir que $A \cup B =]-1, +\infty[$.

Por otra parte, podemos determinar la intersección $A \cap B$, que corresponde a los números que pertenecen a A y B simultáneamente. En la figura anterior, $A \cap B$ son los valores de la recta que quedaron coloreados con verde y rojo, es decir, $A \cap B = [5, 10[$.

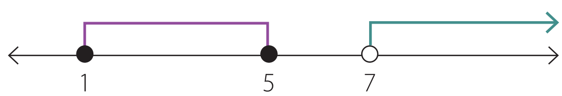
¿Lo entiendes?

En el ejemplo, el número 5, ¿forma parte de $A \cap B$?, ¿y el 10?, ¿por qué?

¿Cómo hacerlo?

Considera los intervalos $C = [1, 5]$ y $D =]7, +\infty[$. Determina $C \cap D$ y $C \cup D$.

Observa la representación gráfica de los intervalos C y D:



Para determinar el conjunto intersección $C \cap D$, debemos observar cuáles son los elementos en común en ambos intervalos. Pero, en este caso, los conjuntos no tienen elementos en común. Esta situación la podemos verificar al determinar que el mayor valor que pertenece al intervalo C es menor que el menor valor perteneciente al intervalo D; luego, no hay intersección, y decimos que $C \cap D = \varnothing$.

Por otra parte, para determinar el conjunto unión, observamos que no es posible expresar la unión de ellos como un único intervalo, porque no tienen elementos en común.

Cuando esto sucede, solo lo representamos como $C \cup D = [1, 5] \cup]7, +\infty[$.

Atención

Si al intersecar dos intervalos no existen elementos comunes a ambos, entonces el resultado es un conjunto sin elementos, llamado **conjunto vacío**, y se representa por el símbolo $\varnothing$.

Tomo nota

- Si se tienen dos intervalos A y B de números reales:
  - la unión entre A y B ($A \cup B$) es otro intervalo que contiene todos los elementos de A y todos los elementos de B;
  - la intersección entre A y B ($A \cap B$) es otro intervalo que contiene los elementos que están en A y que también están en B. Si A y B no tienen elementos en común, la intersección entre A y B es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Actividades

1. Determina las siguientes uniones e intersecciones de intervalos. Expresa tu resultado como intervalo y represéntalo gráficamente en la recta real.

a. $[2, 5[\cup]3, 18[$

b. $]-5, 1] \cap]1, 7[$

c. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$

d. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cap \left]0, +\infty\right[$

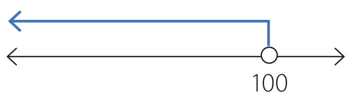
e. $[0, 1[\cap \left( ]-3, 1[\cap [0, 5] \right)$

f. $\left( ]-\infty, 2[\cap [12, +\infty[\right) \cup [0, 20]$

2. Escribe una unión e intersección de intervalos cuyo conjunto solución esté representado en las siguientes figuras.

a. 

b. 

c. 

d. 

3. Dados los intervalos $A =]-\infty, 1[$, $B =]-3, 7]$, $C =]-4, 9[$ y $D = [7, +\infty[$, realiza las siguientes operaciones y representa la solución como un intervalo o como una unión o intersección de estos.

a. $A \cup B$

b. $A \cup D$

c. $B \cap C$

d. $(B \cap D) \cup C$

e. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

f. $(A \cup C) \cap (B \cup D)$

4. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Con qué intervalo representarías el conjunto de los números reales positivos?, ¿y el de los números reales negativos?

b. ¿Puedes representar el conjunto de los números naturales por medio de un intervalo? Justifica tu respuesta.

Desafío

a. Escribe dos intervalos cuya intersección sea igual a un conjunto que tenga un elemento.

b. Escribe dos intervalos cuya unión sea igual al conjunto de los números reales.

Antes de continuar

1. ¿Para qué sirven los intervalos de números reales?
2. ¿En qué se diferencian los intervalos [3, 9] y]3, 9[?